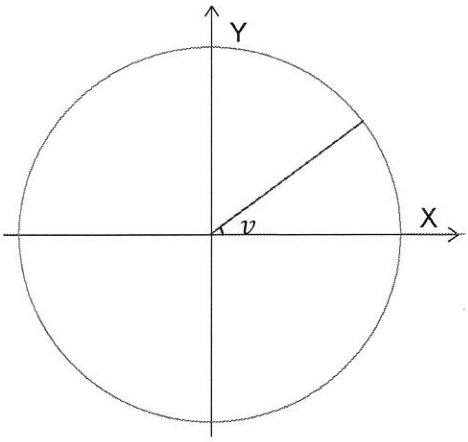
FACIT

Några uppgifter om ”trigonometriska ettan”

Uppgifterna är tänkta att lösas utan miniräknare

1. Bilden visar en enhetscirkel med en vinkel v markerad.



För vinkel v gäller att $\sin(v) = \frac{3}{5}$

Bestäm ett exakt värde på $\cos(v)$

Trig. ettan:

$\sin^2(v) + \cos^2(v) = 1$

$\cos^2(v) = 1 - \sin^2(v)$

$\cos^2(v) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

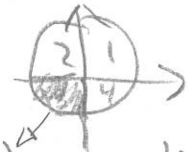
$\cos(v) = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$

Enligt bilden är $\cos(v) > 0$

$\Rightarrow \boxed{\cos(v) = \frac{4}{5}}$

2. För en vinkel, v, gäller att $\cos(v) = -\frac{2}{3}$ och v ligger i tredje kvadranten

Bestäm ett exakt värde på $\sin(v)$



$\sin(v)$ = negativt

Trig. ettan:

$\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v) =$

$1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$\sin^2(v) = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin(v) = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$

$\boxed{\sin(v) = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$

3. Visa att $\sin^2(25°) + \overset{24}{\cancel{5}} + \cos^2(25°) = 25\sin^2(50°) + 25\cos^2(50°)$

$VL = \sin^2(25°) + 24 + \cos^2(25°) = \left[\begin{array}{c}\text{Trig. ettan:}\\ \sin^2(\ ) + \cos^2(\ ) = 1\end{array}\right]$

$= 1 + 24 = 25$

$HL = 25\sin^2(50°) + 25\cos^2(50°) = \left[\begin{array}{c}\text{Bryt ut}\\ 25\end{array}\right] =$

$= 25\left(\sin^2(50°) + \cos^2(50°)\right) = \left[\begin{array}{c}\text{Trig. ettan}\\ \sin^2(\ ) + \cos^2(\ ) = 1\end{array}\right] =$

$= 25 \cdot (1) = 25$

$VL = HL$ VSV.

4. För en vinkel, v, gäller att $\sin(v) = \frac{1}{3}$.

a) Bestäm möjliga värden på $\cos(v)$

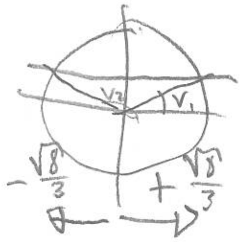
Trig. ettan: $\cos(v) = \pm\sqrt{1-\sin^2(v)} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} =$

$= \pm\sqrt{\frac{9}{9}-\frac{1}{9}} =$

$= \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

b) Förklara varför det finns två möjliga svar på a)-uppgiften

Enhetscirkeln visar att det finns flera vinklar med $\sin(v) = \frac{1}{3}$.



Det som skiljer dessas cosinusvärde är om det är positivt eller negativt. därför fås alltid två möjligheter

5. Visa att

$(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$

$VL = (\sin(x)+\cos(x))^2 = \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) =$

$= [\text{Trig. ettan}] = 1 + 2\sin(x)\cos(x) = HL$ vsv.

6. Lös nedanstående uppgift ifrån ett gammalt nationellt prov

Visa att $\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1\right)=1$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

$VL = \cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1\right) = \left[\begin{matrix}\text{Gånger in}\\ \cos^2(x)\end{matrix}\right] =$

$= \frac{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + 1\cdot\cos^2(x) = \left[\begin{matrix}\text{Förkorta}\\ \cos^2(x)\end{matrix}\right] =$

$= \sin^2(x) + \cos^2(x) = \left[\begin{matrix}\text{Trig.}\\ \text{ettan}\end{matrix}\right] = 1 = HL$

vsv.

7. Bestäm vad a ska bytas ut mot i nedanstående uttryck för att likheten ska gälla

$$(\sin(x) + \cos(x)) \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + a = 1$$

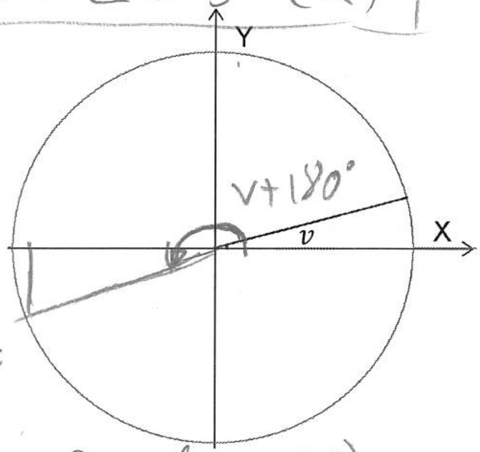
$$VL = (\sin(x) + \cos(x))(\sin(x) - \cos(x)) + a = [\text{Konjugatregeln}]$$
$$= \sin^2(x) - \cos^2(x) + a$$

$$HL = 1 = [\text{Trig. ettan}] = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

$$VL = HL \Rightarrow \cancel{\sin^2(x)} - \cos^2(x) + a = \cancel{\sin^2(x)} + \cos^2(x)$$

$$\boxed{a = 2\cos^2(x)}$$

8. Bilden visar en enhetscirkel med en vinkel v markerad.



För vinkel v gäller att $\sin(v) = \frac{1}{4}$

Bestäm ett exakt värde på $\cos(v + 180°)$

cos (v) ges av Trig. ettan:

$$\cos(v) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(v)} =$$

$$\cos(v + 180°) = -\cos(v)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos(v + 180°) = -\cos(v) = \boxed{-\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

9. Visa att $(\sin(x) - 1)(\sin(x) + 1) = -\cos^2(x)$

$$VL = (\sin(x) - 1)(\sin(x) + 1) = [\text{Konjugatregeln}] =$$
$$= \sin^2(x) - 1 = \left[\begin{array}{l}\text{Trig. ettan:} \\ \sin^2(\ ) = 1 - \cos^2(\ )\end{array}\right] =$$
$$= 1 - \cos^2(x) - 1 = -\cos^2(x)$$

VSV.

10. Det finns en trig. formel, den s.k. "dubbla vinkeln för sinus", som lyder:
$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$

a) Bestäm med hjälp av den möjliga värden på $\cos(2v)$ om $\sin(v) = \frac{2}{3}$

Enligt formeln behövs både sin och cos.
Sin given $\Rightarrow$ cos ges av trig. ettan:

$$\cos(v) = \pm\sqrt{\frac{9}{9} - \frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin(2v) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$$

$$= \pm\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Med sin(2v) given fås cos(2v) mha trig. ettan:

$$\cos(2v) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(2v)} = \pm\sqrt{\frac{81}{81} - \frac{80}{81}}$$

$$\boxed{= \pm\frac{1}{9}}$$

(Använd miniräknaren och formeln för dubbla vinkeln för sinus för att lösa uppgiften nedan):

b) Bestäm ett positivt exakt värde på $\tan(4x)$ om $\cos(2x) = \frac{4}{5}$

$$\tan(4x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} \qquad \sin(4x) = 2\cdot\sin(2x)\cos(2x)$$

Med $\cos(2x) = \frac{4}{5}$ kan $\sin(2x)$ beräknas mha trig. ettan

$$\sin(2x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(2x)} = \pm\sqrt{\frac{25}{25} - \frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

$$\sin(4x) = 2\sin(2x)\cdot\cos(2x) = \pm 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \pm\frac{24}{25}$$

Med $\sin(4x) = \frac{24}{25}$ fås cos(4x) mha trig. ettan: $\cos(4x) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} =$

[Miniräknare:] $= \pm\sqrt{\frac{625}{625} - \frac{576}{625}} = \pm\sqrt{\frac{49}{625}} = \pm\frac{7}{25}$

$$\Rightarrow \sin(4x) = \pm\frac{24}{25} \qquad \cos(4x) = \pm\frac{7}{25} \Rightarrow \tan(4x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(4x)} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}$$

$$\boxed{\tan(4x) = \frac{24}{7}}$$